高等代数 一多项式部分(手稿)

一、数域

N: 自然数　　Q: 有理数　　C: 复数.

Z: 整数　　R: 实数

Def: 复数集 C 的子集 P, 如果满足下面两个条件:

1) $\exists \alpha \in P$, $\alpha \neq 0$

2) P 对四则运算都封闭, 即

① 加法封闭: $\forall a, b \in P$, $a+b \in P$

② 减法封闭: $\forall a, b \in P$, $a-b \in P$

③ 乘法封闭: $\forall a, b \in P$, $ab \in P$

④ 除法封闭: $\forall a, b \in P$, $a/b \in P$

则称 P 为一个数域.

例: Q、R、C 都是数域, 分别是有理数域、实数域, 复数域.

二. 一元多项式

以下记 P 是一个数域,

定义: 设 n 是一个非负整数, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in P$, 则以下表达式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

为系数在数域 P 中的一元多项式.

其中: ① $a_i x^i$ 是该多项式的 i 次项, a_i 是 i 次项的系数.

② a_0 称为常数.

③ 若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n x^n$ 为首项, a_n 为首项系数.

④ 若 $a_n \neq 0$, 则 n 为该多项式的次数.

注: $n=0$ 时, $a_0 \in P$, 也称为 P 上的多项式.

Remark：① 记 $P[x]$ 为数域 P 上的一元多项式集.

② $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$，$g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix_i$

$$\underbrace{f(x)=g(x)}_{\text{两个多项式相等}} \Longleftrightarrow a_i=b_i,\ i=0,1,\cdots$$

③ $\deg f(x)$：若 $f(x)\neq 0$，记 $f(x)$ 的次数为 $\deg f(x)$.

④ $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i \quad g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i\pm b_i)x^i$$

且有：交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

结合律：$f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x)$

$0+f(x)=f(x)$.

$f(x)-f(x)=0$

$-(-f(x))=f(x)$.

注：可以证 $P[x]$ 是一个向量空间.

⑤ 多项式乘法运算律：

□ 交换律：$f(x)g(x)=g(x)f(x)$.

□ 结合律：$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

$1\cdot f(x)=f(x)$

$0\cdot f(x)=0$

⑥ $(f(x)+g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$.

三. 带余除法

Def. 设 P 是一个数域. $f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $g(x) \neq 0$. 如果 $q(x), r(x) \in P[x]$ 满足下面条件

1) $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

2) $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$

则称 $q(x)$ 是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式, $r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

注: $f(x)$: 被除式 ; $g(x)$: 除式.

Question: 给了一个 $f(x)$, 以及 $g(x)$, 怎么求 $q(x)$、$r(x)$.

有一种方法叫综合除法.

例: 求 x^2-3x+1 除 $3x^3+4x^2-5x+6$ 的商式和余式.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 13 \\
\hline
x^2-3x+1 & 3x^3+4x^2-5x+6 \\
 & 3x^3-9x^2+3x \\
\cline{2-2}
 & \quad 13x^2-8x+6 \\
 & \quad 13x^2-39x+13 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 31x-7
\end{array}
$$

Theorem: 设 $f(x)$、$g(x) \in P[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式与余式唯一.

Def 同余：设 $f_1(x), f_2(x), g(x) \in P[x]$，且 $g(x) \neq 0$. 如果 $g(x)$ 除 $f_1(x), f_2(x)$ 的余式相同，则称 $f_1(x), f_2(x)$ 模 $g(x)$ 同余。记作：

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \pmod{g(x)}$$

例：$x^2-2x+2 \equiv x^2 \pmod{x-1}$

Def 整除：设 $f(x)$、$g(x) \in P[x]$，且 $g(x) \neq 0$，若 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的余式为 0，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式，记为 $g(x) \mid f(x)$.

定理 $f_1(x) \equiv f_2(x) \pmod{g(x)}$ iff $f_1(x) - f_2(x) \equiv 0 \pmod{g(x)}$

定理 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，且 $f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$，则 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x) \Longleftrightarrow \exists\, c \in P$，$c \neq 0$，s.t. $f(x) = c\,g(x)$

proof: STEP1. If $f(x) = c\,g(x)$. $\Rightarrow g(x) \mid f(x)$.

另一方面，$c \neq 0$，$c \in P$，所以 $g(x) = c^{-1} f(x)$. $\Rightarrow f(x) \mid g(x)$

STEP 2. If $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，

则存在 $p(x), q(x)$ 使得

$$f(x) = g(x)\,p(x)$$
$$g(x) = f(x)\,q(x).$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x)\,p(x)\,q(x)$$

$$\Rightarrow p(x)\,q(x) = 1$$

因为 $\deg 1 = 0$，故 $\deg p(x) = \deg q(x) = 0$，

即有 $p(x) = c \in P$，$c \neq 0$

四 最大公因式

定义: [公因式] P是一个数域，$h(x)$、$f(x)$、$g(x)\in P[x]$，如果

$$h(x)\mid f(x)\ ,\ h(x)\mid g(x),$$

则称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式

Example: x^2-1 是 x^4-1 与 x^6-1 的公因式.

定义 [最大公因式]. $d(x)$, $f(x)$, $g(x)\in P[x]$, 且 $d(x)\neq 0$。如果

1) $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$

2) 若 $h(x)\mid f(x)$, $h(x)\mid g(x)$, 则 $h(x)\mid d(x)$

则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

[首一多项式的最大公因式] 记为 $(f(x),g(x))$.

定理: 设 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式，商式分别为 $r(x)$，$q(x)$；又 $(g(x),r(x))$ 存在，则 $(f(x),g(x))$ 存在，且

这里给出了迭代求解最大公因式的过程

$$(f(x),g(x)) = (g(x),r(x))$$

proof: 只要证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式集合和 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的公因式的集合相等就行了。

① 设 $h(x)\mid f(x)$, $h(x)\mid g(x)$, 则

$$h(x)\mid f(x)-g(x)q(x)=r(x)$$

即 $h(x)\mid g(x)$, $h(x)\mid r(x)$

② 设 $k(x)\mid g(x)$, $k(x)\mid r(x)$, 则

$$k(x)\mid g(x)q(x)+r(x)=f(x)$$

即 $k(x)$ 为 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式.

定理: $P[x]$ 中两个非零多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))$ 存在，且为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合.

定义[互素] 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，如果 $(f(x), g(x))=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

定理：设 $f(x), g(x) \in P[x]$，则 $(f(x), g(x))=1$ 当且仅当存在 $u(x), v(x) \in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

proof: ① $(f(x), g(x))=1 \Rightarrow$ 由最大公因式是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合

$$\Rightarrow u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

② $$\left.\begin{array}{l} u(x)f(x)+v(x)g(x)=1 \\ (f(x),g(x)) \mid f(x). \\ (f(x),g(x)) \mid g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (f(x),g(x)) \mid 1 \Rightarrow (f(x),g(x))$$

Remark：以上最大公因式、互素及相关定理均可推广到多于2个多项式的情形.

① 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$, $(k \geq 2)$; $d(x) \in P[x]$. 则若

1) $d(x) \mid f_i(x)$, $1 \leq i \leq k$

2) 若 $h(x) \mid f_i(x)$, $1 \leq i \leq k$, 则 $h(x) \mid d(x)$

则 $d(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x) \cdots f_k(x)$ 的最大公因式，其首项系数为1的最大公因式记为 $(f_1(x), \cdots, f_k(x))$

② $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 互素

$$\Updownarrow$$

$$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, u_i(x) \in P[x], 1 \leq i \leq k, \text{ s.t. } \sum_{i=1}^{k} u_i(x) f_i(x) = 1$$

③ $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$ 是 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 的组合.

五. 因式分解:

定义: 可约多项式 v.s. 不可约多项式.

$p(x)\in P[x]$, $\deg p(x)\geq 1$

① 若 $p(x)$ 不能表示为 $P[x]$ 中两个次数小于 $\deg p(x)$ 的多项式的乘积, 则称 $p(x)$ 为 $P[x]$ 中不可约多项式.

② 若 $\exists f_i(x)\in P[x]$, 使得

$$p(x)=f_1(x)f_2(x),\quad \deg f_i(x)<\deg p(x).$$

则 $p(x)$ 是 $P[x]$ 上的可约多项式.

定理: ① $p(x)\in P[x]$, $\deg p(x)=1$, 则 $p(x)$ 不可约

不可约多项式的性质

② $p(x), f(x)\in P[x]$, 且 $p(x)$ 不可约, 则

$$(p(x), f(x))=1 \text{ 或 } (p(x), f(x))=c^{-1}p(x).$$

定理: (因式分解及唯一性定理)

设 P 是一个数域, 又 $f(x)\in P[x]$, $\deg f(x)>1$, 则 $f(x)$ 可以分解为 $P[x]$ 中不可约多项式的乘积

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),\quad p_i(x) \text{ 不可约}.$$

如果 $f(x)$ 还有另一种分解,

$$f(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),\quad q_j(x) \text{ 不可约},$$

则 $s=t$, 且经适当排列后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x)$$

Remark: 若假定上述定理中的 $p_i(x)$ 为首一不可约多项式, 于是 $f(x)\in P[x]$, $\deg f(x)\geq 1$ 有分解:

$$f(x)=c\,p_1(x)^{r_1}p_2(x)^{r_2}\cdots p_s(x)^{r_s}$$

其中 c 为 $f(x)$ 的首项系数; $i\neq j$ 时, $(p_i(x), p_j(x))=1$, 这种分解称为 $f(x)$ 的标准分解.

定理：设 $f(x), g(x) \in P[x]$，且不为 0，又

$$f(x) = a p_1(x)^{r_1} p_2(x)^{r_2} \cdots p_s(x)^{r_s}, \quad r_i \geq 0$$
$$g(x) = b p_1(x)^{t_1} p_2(x)^{t_2} \cdots p_s(x)^{t_s}, \quad t_i \geq 0$$

分别为 $f(x), g(x)$ 的标准分解，则

$$(f(x), g(x)) = \prod_{i=1}^{s} p_i(x)^{\min(r_i, t_i)}$$

定义：(重因式) 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 k 重因式，如果 $p(x)^k \mid f(x)$，而 $p(x)^{k+1} \nmid f(x)$。

此时，我们记为 $p(x)^k \| f(x)$，即 $p(x)$ 恰整除 $f(x)$

注：$k=0$ 时，$p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式；$k=1$ 时，我们说 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式；$k \geq 2$ 时，$p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式

定义：(导数) 设 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in P[x]$，称多项式

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

为 $f(x)$ 的导数(微商)，记为 $f'(x)$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$

定理：① 若 $p(x)$ 不可约，则 $(p(x), p'(x)) = 1$

② 不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式当且仅当

$$p(x) \mid (f(x), f'(x))$$

③ $f(x)$ 无重因式当且仅当 $(f(x), f'(x)) = 1$

④ $P[x]$ 中多项式 $f(x)$ 的标准分解为 $f(x) = c p_1(x)^{r_1} p_2(x)^{r_2} \cdots p_s(x)^{r_s}$

其中 $p_i(x)$ 为首一不可约多项式，$r_i \geq 1$，则

$$(f(x), f'(x)) = p_1(x)^{r_1-1} p_2(x)^{r_2-1} \cdots p_s(x)^{r_s-1}$$
$$f(x) / (f(x), f'(x)) = c_1 p_1(x) p_2(x) \cdots p_s(x).$$

proof:

略证① $\because$ $p(x)$ 不可约，$\therefore$ $(p'(x), p(x)) = 1$ 或 $(p'(x), p(x)) = c\,p(x)$.

又 $\because$ $(p'(x), p(x)) \mid p'(x)$，$\therefore$ $\deg(p'(x), p(x)) \leq \deg p'(x) < \deg p(x)$

$\therefore$ $(p'(x), p(x)) = 1$

六 多项式的根

定义 [多项式函数] 对一个固定的多项式$f(x)$，我们建立一个从数域P到P的映射：$a \longrightarrow f(a)$，$\forall a \in P$。这样得到一个函数，称为P上的多项式函数，仍记为$f(x)$，而$f(a)$称为$f(x)$在a处的值。

定义 [零点、根、重根、单根]

如果$f(x)$在a处的值为0，即$f(a)=0$，称a为$f(x)$的零点，也称作多项式方程$f(x)=0$的解或根。如果$x-a$是$f(x)$的$k(\geq 0)$重因式，则称a为$f(x)$的k重根。$k=0$时，a不是根；$k=1$，a叫单根，$k>1$，a叫重根。

定理 $P[x]$中$n(\geq 0)$次多项式至多n个根，其中k重根算k个根。

证：设$f(x) \in P[x]$，$\deg f(x)=n$

① $n=0$，则$f(x)$为非零常数，因而没有根。

② 设$n>0$，设$f(x)$的标准分解为：

$$f(x) = c\, p_1(x)^{r_1} p_2(x)^{r_2} \cdots p_s(x)^{r_s}$$

其中$p_i(x)$为首一不可约多项式，且$i \neq j$时，$p_i(x) \neq p_j(x)$。显然$f(x)$根的个数为

$$\sum_{\deg p_j(x)=1} r_j \leq \sum_{i=1}^{s} r_i \deg p_i(x) = \deg f(x) = n$$

定理 (代数学基本定理) 设$f(x) \in C[x]$，且$\deg f(x) \geq 1$，则$f(x)$在C中有根。

定理：（复数系多项式因式分解定理）

若 $f(x)\in C[x]$，且 $\deg f(x)\geq 1$，则 $f(x)$ 有分解：

$$f(x)=a(x-a_1)^{l_1}(x-a_2)^{l_2}\cdots(x-a_s)^{l_s}$$

a 为 $f(x)$ 的首项系数，$\sum_{i=1}^{s} l_i=\deg f(x)$.

定理：（实系数多项式因式分解定理）

设 $f(x)\in R[x]$，且 $\deg f(x)\geq 1$，且 $f(x)$ 的标准分解为

$$f(x)=a(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_r(x)+q_r)^{k_r}$$

其中 a 为首项系数，$p_i^2-4q_i<0$，$1\leq i\leq r$.

定理：n 次复数系数多项式在 C 中恰有 n 个根（k 重根算 k 个根）

以下是实系数多项式因式分解定理的证明：

采用数学归纳法.

① 当 $\deg(f(x))=1$ 时，$f(x)=a(x-c)$，结论显然成立.

② 设 $\deg f(x)<n$ 时，结论成立.

③假设 $\deg(f(x))=n$，$f(x)$ 作为 $C[x]$ 中元素，有 $c\in C$，

使得 $(x-c)\mid f(x)$，即 $f(c)=0$

1) 若 $c\in R$，则 $f(x)=(x-c)f_1(x)$，$f_1(x)\in R[x]$，

由于 $f_1(x)$ 的最高次项最多为 $n-1$，i.e. $\deg f_1(x)=n-1$，

则由数学归纳法第2步知定理得证.

2) 若 $c\notin R$，则 $f(\bar{c})=0$，即 $(x-\bar{c})\mid f(x)$. 由于 $c\neq\bar{c}$，

故 $(x-c,x-\bar{c})=1$. 于是有

$$(x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c})\mid f(x),$$

即有 $(c+\bar{c})^2-4c\bar{c}<0$，

因而 $f(x)=(x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c})f_2(x)$，

由 $\deg f_2(x)<n$，利用数学归纳法第2步即证.